堀　淳一

なお詳細はすでにプログレスに一部発表され，一部印刷中である：

参　考　文　献

Phase Transition between Stationary States I — A Simple Model of Laser-Like Behaviour, J. Hori, Y. Y. Okamoto, M. Ono and Y. Sawaya, Prog. Theor. Phys. **52** (1974) 1146.

Phase Transition between Stationary States II — Liapounoff Function in Bénard Problem, I. Shimada and J. Hori, Prog. Theor. Phys., in press.

散逸構造と一般化TDGL方程式

九大・理　　蔵本由紀

散逸的な2成分ダイナミカルシステム

$$(\partial_t - \hat{D}\,\nabla_{\underset{\sim}{r}}^2)\,\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{F}\,(\underset{\sim}{X}) \qquad (1)$$

を考える。ここに

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad \hat{D} = \begin{pmatrix} D_X & 0 \\ 0 & D_y \end{pmatrix},$$

また$\underset{\sim}{F}$は一般に$\underset{\sim}{X}$の非線型項を含むとする。このモデルの典型例は拡散過程を含む非線型化学反応系であるが，以下の議論ではこのことは直接関係ない。この系の示す不安定現象のいくつかとその後形成される散逸構造を調べよう。拡散係数D_X, D_y及び$\underset{\sim}{F}$の$\underset{\sim}{X}$に関する展開係数をひとまとめにしてパラメタの組$\underset{\sim}{\lambda}$であらわすことにする。式(1)はなお一般的過ぎるので次のようなモデルの簡単化を行う。

(I)　$\underset{\sim}{\lambda}$は実数パラメタ，そして$\underset{\sim}{r}$，tに無関係，更にD_X, $D_y > 0$。

(II)　体系は境界効果を無視できるほど十分大きい。

(iii) パラメタ空間のある領域で空間的に一様な定常解 $\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{X}_0$ が安定に存在する。

以下我々が調べることができるのは，この定常解の不安定化のタイプとそれに関連する散逸構造に関してである。まずこの解の安定性を議論するために $\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{X}_0+\underset{\sim}{x}$， $\underset{\sim}{x}\equiv\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて (1)を

$$\hat{\Gamma}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{G}(\underset{\sim}{x}) \tag{2}$$

と書き直す。ここに

$$\hat{\Gamma}(-i\partial_t,\ -i\Delta_{\underset{\sim}{r}}) = \begin{pmatrix} \partial_t + K_{xx} - D_x\Delta_{\underset{\sim}{r}}^2 & K_{xy} \\ K_{yx} & \partial_t + K_{yy} - D_y\Delta_{\underset{\sim}{r}}^2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$K_{ij} \equiv -\left(\frac{F_i}{\partial X_j}\right)_{\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{X}_0},$$

$$G_i = \underset{\sim}{x}^t\,\hat{P}_i\,\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{x}^t\,\hat{Q}_i\,\hat{x}\,\underset{\sim}{x} + \cdots\cdots, \tag{4}$$

$$\hat{x} \equiv \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

と書ける。$\hat{P}_i$, $\hat{Q}_i$ は 2×2 係数マトリクスである。

$$\hat{L} \equiv \hat{\Gamma}^{-1}\det\hat{\Gamma} \tag{5}$$

を定義すると(2)は

$$\mathscr{L}\,\underset{\sim}{x} = \hat{L}\,\underset{\sim}{G}(\underset{\sim}{x}), \tag{6}$$

$$\mathscr{L}(-i\partial_t,\ -i\Delta_{\underset{\sim}{r}}) \equiv \det\hat{\Gamma}$$

となる。線型理論で安定性を調べる為に $\underset{\sim}{x} \propto \exp[i(\omega t + \underset{\sim}{k})]$ とおき，

$$\mathscr{L}(\omega,\ k) = (i\omega)^2 + \alpha(k)(i\omega) + \beta(k) = 0 \tag{7}$$

によって，$\mathrm{Re}(i\omega)$ の符号を調べる。ここに

$$\mathscr{L} = \mathrm{tr}\,\hat{\Gamma}(0,k), \qquad \beta = \det\hat{\Gamma}(0,k) \tag{8}$$

解 $\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{X}_0$ の安定条件（必要十分条件）は明らかに“$\alpha, \beta > 0$ for ^-k”であるから，この条件が破れはじめるのは次の 2つの場合である。

(A) $\beta(k_c)=0, \quad \alpha(k), \ \beta(k \neq k_c) > 0$

このときは1つのモードだけが不安定化しはじめ臨界波数 k_c は

$$k_c^2 = \mathrm{Max}[0, -(K_{xx}^c D_y^c + K_{yy}^c D_x^c)/2D_x^c D_y^c] \tag{9}$$

で与えられる。$k_c \neq 0$ の場合を Turing instability という。

(B) $\alpha(k_c)=0, \quad \beta(k), \ \alpha(k \neq k_c) > 0$

このときは2つのモードが同時に不安定化する。$D_x, D_y > 0$ より $k_c = 0$ となることは直ちにわかる。このとき

$$\omega = \pm\omega_0, \quad \omega_0 = (\det \hat{K}_c)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

次に不安定点近傍のダイナミクスを考える。Case (A) については1次元 Turing instalility に限ることにする。なぜならそれ以外の場合には一般に1次相転移となって以下のアプローチはそのままの形では適用できないからである。

不安定点近傍では ε を小さい量として

$$\underset{\sim}{\lambda} = \underset{\sim}{\lambda}_c + \varepsilon\, \underset{\sim}{n} \tag{11}$$

と書ける。$\underset{\sim}{n}$ は単位ベクトルである。

$$f \equiv \begin{cases} e^{ik_c r} & (\text{Case A}) \\ e^{i\omega_0 t} & (\text{Case B}) \end{cases}$$

を定義すると，線型理論では不安定点 $\underset{\sim}{\lambda} = \underset{\sim}{\lambda}_c$ において

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\alpha}\, f + \text{c. c.} \tag{12}$$

だけが $t \to \infty$ で生き残る。ここに $\underset{\sim}{\alpha}$ は大きさ不定の定方向をもつベクトルである。不安定点近傍では $\underset{\sim}{x}$ はやはり(12) の形で書け，但し $\underset{\sim}{\alpha}$ が次のようなスケール不変の形をもっていると期待される。

$$\left.\begin{aligned} &\underset{\sim}{\alpha} = \sigma\, \underset{\sim}{a}\, W(\underset{\sim}{R}, T \ ; \ \bar{r}_0, \bar{r}_0, \bar{\sigma}) \\ &\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{r}/r_0, \quad T = t/t_0, \\ &\bar{r}_0 = \varepsilon^{\frac{1}{2}} r_0, \quad \bar{t}_0 = \varepsilon t_0, \quad \bar{\sigma} = \varepsilon^{-1/2}\sigma \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ここに $\underset{\sim}{a}$ はコンスタントベクトル，r_0, t_0 ，σ は任意のスケーリングパラメタである。こう仮定した上で，Reductive perturbation の方法によりWが従うべき方程式を求めてみると，r_0, t_0, σ を適当に選ぶことにより

$$\partial_T W = \{ (\pm 1 + iC_0) + (1+iC_1)\Delta_{\underset{\sim}{R}}^2 - (1+iC_2)\,|W|^2 \}\,W \qquad (14)$$

が得られる。但し式中の±は post-crtical 又は sub - critical に対応している。Case (A) では $C_0 = C_1 = C_2 = 0$ である。(14)式をもとにして post-critical patlern に関していろいろ調べることができるが紙数の関係上省略する。

臨界点近傍での Nucleation

京大　川崎恭治

Nucleation の理論は核の状態和を求める際にあらわれる回転，並進の自由度の取扱いをめぐってここ 10年程，いつ果てるとも知れぬ論争がつゞいているが臨界点近傍では核の大きさがマクロになるのでこの問題を避ける事ができてより nuambiguous な理論が作れるものと期待されている[1] ここでは筆者の求めた液体のオーダーパラメターに対する閉ぢた Stochastic Equation[2] を使って nucleation rate を求める試みについて話した。今臨界核の半径 R^* がゆらぎの相関距離 ξ に比して十分長ければ nucleation rate I は

$$I = \mathcal{V}\,(2\pi\lambda)^{-1/2}\,\kappa\,\exp(-\Delta\Phi)$$

となる。ここで $\mathcal{V}$ は体積に比例する因子[3]，λ は dropletの自由エネルギ $\Phi(k)$ を R^* の近くで $\Phi(k) \simeq \Phi(R^*) - \frac{1}{2}\lambda(R-R^*)^2$ とかいた時の係数，$\kappa \equiv 2\sigma L/(\Delta a)^2 (R^*)^3$ は臨界核の生長率，$\Delta\Phi$ はその自由エネルギ，σ は表面張力，Lは order parameter dynamins にあらわれるくりこまれた輸送係数，Δa は onder parameter の共存二相での値の差である。[4] この結果（或はこれまで得られているすべての理論の結果）は主